

Formació i evolució estel·lar

Estudiant: Sergi Blanco Cuaresma

30 d'agost de 2011

Resum

Síntesis de l'assignatura de formació i evolució estel·lar.

Índex

1	Processos radioactius	2
1.1	Radiació	2
1.1.1	Intensitat	2
1.1.2	Flux	2
1.1.3	Lluminositat específica	2
1.1.4	Lluminositat bolomètrica	2
1.1.5	Llei de Planck: cos negre tridimensional	3
1.1.6	Llei de Nyquist: cos negre unidimensional	4
1.1.7	Temperatura de brillantor	5
1.1.8	Temperatura de radiació	5
1.2	Telescopi	5
1.2.1	Resolució	6
1.2.2	Energia	7
1.2.3	Temperatura	7
2	Interacció radiació-matèria: descripció macroscòpica	8
2.1	Equació del transport radioactiu	8
3	Interacció radiació-matèria: descripció microscòpica	9
3.1	Moviments tèrmics	9
3.2	Perfil de línia	9
3.3	Coefficients d'Einstein	10
3.4	Funció de font	11
3.5	Profunditat òptica	11

1 Processos radioactius

1.1 Radiació

1.1.1 Intensitat

$I_\nu(r, k, t)$: Energia per unitat d'interval de freqüència ($d\nu$) per unitat de temps (dt) que travessa un àrea unitat ($dA \cdot \cos \theta$) perpendicular al vector unitari de direcció k , centrat a la posició r i transportada per la radiació propagada dintre d'un angle sòlid ($d\Omega$) d'unitat centrada a la direcció k .

$$dE = I_\nu \cdot dt \cdot dA \cdot \cos \theta \cdot d\Omega \cdot d\nu \quad (1)$$

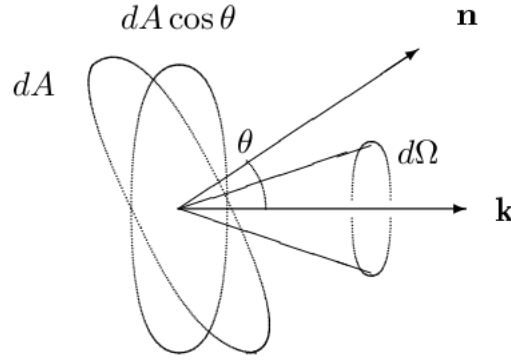


Figura 1: Energia dintre d'un angle sòlid

Unitats de la intensitat: $\text{erg s}^{-1} \text{cm}^{-2} \text{sr}^{-1} \text{Hz}^{-1}$

1.1.2 Flux

Flux d'energia que travessa el àrea d'unitat per unitat de freqüència. Per a una font discreta:

$$F_\nu = \int_{\text{font}} I_\nu d\Omega \quad (2)$$

Unitats del flux: $\text{erg s}^{-1} \text{cm}^{-2} \text{Hz}^{-1}$

A radio astronomia es fa un ús habitual del Jansky (Jy): $1 \text{Jy} = 10^{-23} \text{erg s}^{-1} \text{cm}^{-2} \text{Hz}^{-1}$.

1.1.3 Lluminositat específica

La lluminositat específica a freqüència ν d'una font isòtropa (p.ex. estrella) s'obté multiplicant l'àrea de l'esfera pel flux a la superfície:

$$L_\nu = 4\pi d^2 F_\nu \quad (3)$$

a on d és el radi.

Unitats de la lluminositat: $\text{erg s}^{-1} \text{Hz}^{-1}$

1.1.4 Lluminositat bolomètrica

Energia total radiada per segon que s'obté de la integral de la lluminositat específica per a totes les freqüències.

$$L = 4\pi d^2 F \quad (4)$$

a on F és el flux total.

Unitat de la lluminositat bolomètrica: $L_\odot = 3,826 \times 10^{33} \text{erg s}^{-1}$

1.1.5 Llei de Planck: cos negre tridimensional

En equilibri termodinàmic, la radiació està en equilibri amb la matèria i per tant la intensitat ve determinada per la llei de Planck per un cos negre:

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (5)$$

a on T és la temperatura.

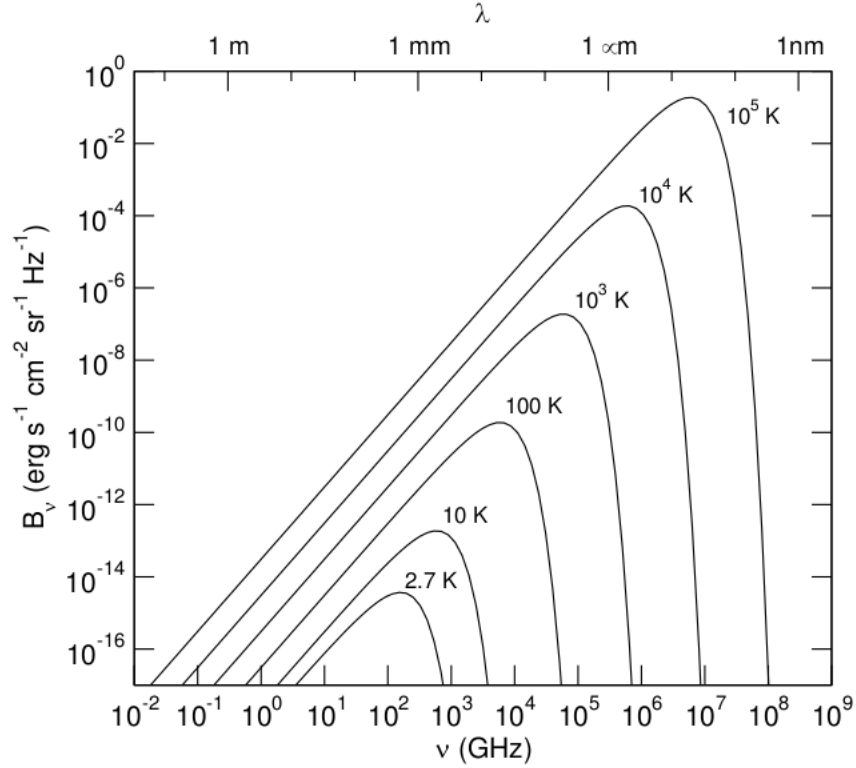


Figura 2: Llei de Planck

Aproximació de Rayleigh-Jeans per a freqüències baixes $\nu \ll 20T$ (freqüència en Ghz i temperatura en Kelvins):

$$B_\nu \simeq \frac{2k\nu^2}{c^2} T \quad (6)$$

Llei de Wien com aproximació per a freqüències altes:

$$B_\nu \simeq \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-h\nu/kT} \quad (7)$$

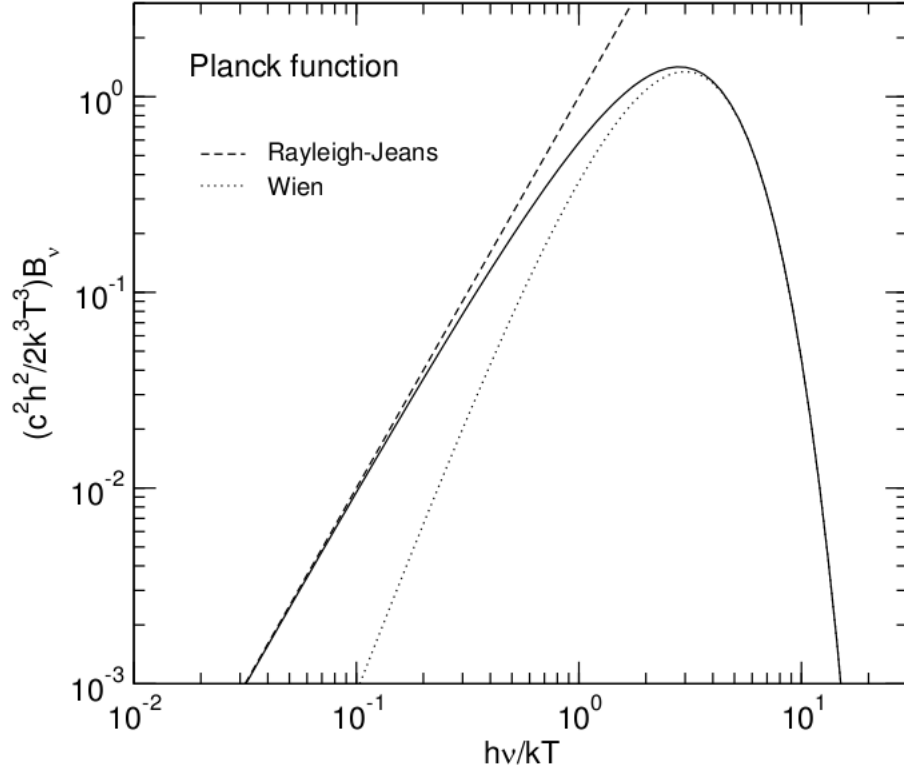


Figura 3: Aproximacions per a la Llei de Planck

La freqüència a on es troba el pic determina la temperatura del cos negre i es pot obtenir mitjançant la llei del desplaçament de Wien:

$$\nu_{max} = 59T \quad (8)$$

a on la freqüència ν està en Ghz i la temperatura en Kelvins.

Flux per un cos negre:

$$F_\nu = \pi B_\nu \quad (9)$$

I flux total:

$$F = \sigma T^4 \quad (10)$$

a on $\sigma = 5,6705 \times 10^{-5} \text{erg s}^{-1} \text{cm}^{-2} \text{K}^{-4}$ és la constant de Stefan-Boltzman.

1.1.6 Llei de Nyquist: cos negre unidimensional

L'energia per unitat de temps i interval de freqüència (concepte equivalent a la lluminositat específica):

$$\omega_\nu = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (11)$$

Aproximació per freqüències baixes:

$$\omega_\nu = kT \quad (12)$$

1.1.7 Temperatura de brillantor

En general, la radiació no està en equilibri amb la matèria. No obstant, per cada freqüència es possible definir una temperatura de brillantor:

$$I_\nu = B_\nu(T_B) \quad (13)$$

No es tracta de temperatures físiques sinó d'una forma de simplificar les unitats d'intensitat i poder treballar amb Kelvins.

1.1.8 Temperatura de radiació

La temperatura de radiació és proporcional a la intensitat:

$$T_R = J_\nu(T_B) \quad (14)$$

$$J_\nu(T) = \frac{h\nu/k}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (15)$$

Cal destacar que per a temperatures que tendeixen a infinit: $\lim_{T \rightarrow \infty} J(T) = T$

1.2 Telescopi

Un telescopi no pot produir una imatge d'un punt quan s'observa un objecte individual com una estrella degut a la difracció. Quan la llum passa per l'apertura del telescopi i arriben al mirall principal, les ones interfereixen unes amb les altres.

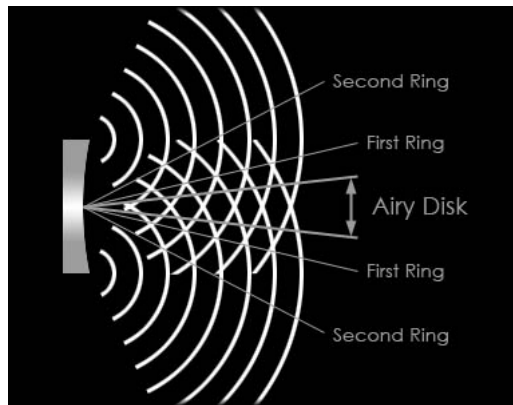


Figura 4: Ones de llum. L'airy disk és el pic principal de llum.

El resultat és que la llum de l'estrella no decau suaument des del seu punt central fins al fons de cel, sinó que es produeix un patró d'interferències (destructives/constructives).

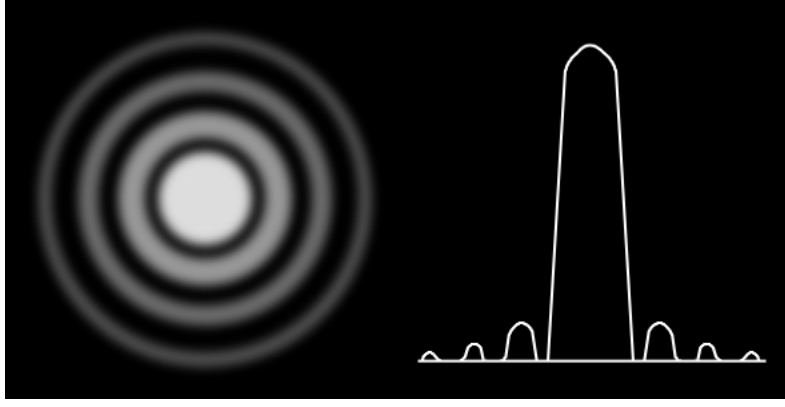


Figura 5: Imatge de difracció

A la imatge obtinguda d'una font no resolta (p.ex. estrella) es denomina funció de dispersió de punt (PSF, Point Spread Function) i és representada per P_n , normalitzada a 1 en la direcció de l'eix del telescopi $P_n(0, 0) = 1$.

1.2.1 Resolució

La resolució angular ve caracteritzada per l'amplada a alçada meitat θ_A i per l'angle sòlid del feix de telescopi per on rep la radiació:

$$\Omega_A = \int_{4\pi} P_n d\Omega \quad (16)$$

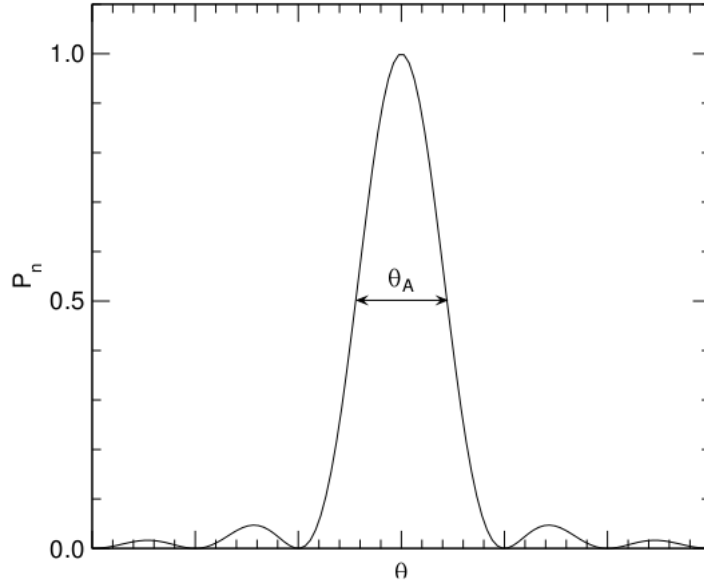


Figura 6: Feix típic amb l'amplada a alçada meitat θ_A i lòbuls secundaris.

Si es té només en compte el feix principal, llavors es pot fer referència a l'angle sòlid del feix principal Ω_M i obtenir el cocient que representa l'eficiència del feix principal:

$$\eta_M = \frac{\Omega_M}{\Omega_A} < 1 \quad (17)$$

Relació angle sòlid del feix principal amb l'amplada a alçada meitat:

$$\Omega_M \simeq 1,133\theta_A^2 \quad (18)$$

Obtenció del flux de la font:

$$F_\nu \simeq I_\nu^{pic} \Omega_S^{obs} \quad (19)$$

a on Ω_S^{obs} és l'angle sòlid observat.

1.2.2 Energia

L'energia captada ($erg\ s^{-1}Hz^{-1}$) per un telescopi ve determinada per:

$$\omega_\nu = \frac{1}{2} A_e \int_{4\pi} I_\nu P_n d\Omega \quad (20)$$

a on A_e és l'àrea col·lectora efectiva (p.ex. eliminant la part del mirall secundari), la qual es troba relacionada amb l'angle sòlid del feix:

$$A_e \Omega_A = \lambda^2 \quad (21)$$

Per altra banda, l'eficiència de l'apertura es pot determinar amb:

$$\eta_A = \frac{A_e}{\pi D^2/4} < 1 \quad (22)$$

1.2.3 Temperatura

La temperatura d'antena ve determinada per:

$$\omega_\nu = kT_A \quad (23)$$

I la temperatura del feix principal (temperatura de radiació observada):

$$T_{MB} = \frac{1}{\eta_M} T_A \quad (24)$$

Casos límit:

- Font no resolta: la temperatura de radiació observada és molt inferior a la de radiació de la font $T_{MB} = \frac{\Omega_S}{\Omega_M} T_R$
- Font resolta: les temperatures de radiació observades i la de la font són similars $T_{MB} \simeq T$

Per altra banda:

$$I_\nu^{pic} = 2,95 T_{MB} \theta_A^2 \nu^2 \quad (25)$$

a on la intensitat pic es mesura en $mJy\ haz^{-1}$, la temperatura del feix principal en Kelvin, l'angle ?? en minuts d'arc i la freqüència en GHz.

2 Interacció radiació-matèria: descripció macroscòpica

2.1 Equació del transport radioactiu

El coeficient d'absorció k_ν representa l'atenuació per unitat de longitud de freqüència i el coeficient d'emissió j_ν és la intensitat generada per unitat de longitud.

L'equació del transport radioactiu:

$$\frac{dI_\nu}{dl} = -k_\nu I_\nu + j_\nu \quad (26)$$

Recorregut mig lliure del fotó:

$$l_\nu = \frac{1}{k_\nu} \quad (27)$$

Canvi de variables:

- Profunditat òptica: $d\tau_\nu = k_\nu dl$
- Funció de font: $S_\nu = \frac{j_\nu}{k_\nu}$

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -I_\nu + S_\nu \quad (28)$$

Si es considera que la funció font és constant per a una regió:

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0) e^{-\tau_\nu} + S_\nu (1 - e^{-\tau_\nu}) \quad (29)$$

Casos límit:

- Regió òpticament prims ($\tau_\nu \ll 1$): $I_\nu \simeq I_\nu(0) + \int_0^L j_\nu$
- Regió òpticament gruixuda ($\tau_\nu \gg 1$): $I_\nu \simeq S_\nu$

La temperatura d'excitació es defineix utilitzant la llei de Planck (veure definició de J_ν a l'equació 15):

$$S_\nu = B_\nu(T_{ex}) \quad (30)$$

$$S_\nu = \frac{2k\nu^2}{c^2} J_\nu(T_{ex}) \quad (31)$$

L'equació del transport es pot reescriure:

$$J_\nu(T_B) = J_\nu(T_{bg}) e^{-\tau_\nu} + J_\nu(T_{ex}) (1 - e^{-\tau_\nu}) \quad (32)$$

a on T_{bg} és la temperatura de brillantor corresponent a $I(0)$.

Casos límit:

- Regió òpticament prims ($\tau_\nu \ll 1$): $J_\nu(T_B) = J_\nu(T_{bg}) + J_\nu(T_{ex}) \tau_\nu$
- Regió òpticament gruixuda ($\tau_\nu \gg 1$): $J_\nu(T_B) = J_\nu(T_{ex})$

3 Interacció radiació-matèria: descripció microscòpica

3.1 Moviments tèrmics

Gas de partícules a on el mecanisme que determina la seva velocitat són les colisions entre partícules. La densitat de partícules amb vector velocitat entre v i $v + dv$:

$$dn(v) = n f(v) dv \quad (33)$$

a on n és la densitat total de partícules (num. per cm^{-3}) i $f(v)$ ve determinada per una distribució maxwelliana isòtropa a on es considera el mòdul del vector velocitat $v = |v|$:

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k T_k} \right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT_k} \quad (34)$$

a on m és la massa molecular mitja i T_k la temperatura cinètica del gas.

El valor mig del mòdul de la velocitat:

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT_k}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \sigma_{v_r} \quad (35)$$

a on $\sigma_{v_r} = \sqrt{\frac{kT_k}{m}}$

El quadrat del mòdul:

$$\langle v^2 \rangle = \frac{3kT_k}{m} = 3\sigma_{v_r}^2 \quad (36)$$

3.2 Perfil de línia

ν representa un canvi d'energia ΔE i comporta una absorció o emissió de fotons amb freqüència $\nu_0 = \frac{\Delta E}{h}$. No obstant, aquesta transició no s'observa infinitament estreta sinó que presenta un perfil de línia $\phi(\nu)$ centrat a ν_0 :

$$\phi(\nu_0) \Delta\nu = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\nu) d\nu = 1 \quad (37)$$

a on $\Delta\nu$ és l'amplada de la línia (a efectes pràctics, equivalent a l'amplada a alçada meitat).

Per tant, el coeficient d'absorció k_ν i d'emissió j_ν també segueixen el perfil de línia:

$$k_\nu = k_0 \Delta\nu \phi(\nu) \quad (38)$$

$$j_\nu = j_0 \Delta\nu \phi(\nu) \quad (39)$$

a on k_0 i j_0 són els valors del coeficient al centre de la línia.

Les causes físiques d'aquests perfil de línia són:

1. El fotons emesos no tenen la mateixa freqüència al sistema de referència de les partícules pel principi d'incertesa de Heisenberg.
 - (a) La transició es pot donar en qualsevol moment dintre del temps de vida t_{vida} , fet que fa que la seva energia sigui indeterminada en un factor de l'ordre de $\frac{\hbar}{t_{vida}}$. Aquest fet provoca una dispersió de freqüències de l'ordre $\Delta\nu \simeq (2\pi t_{vida})^{-1}$.
 - (b) La distribució de fotons dona un perfil de línia en forma lorentziana:

$$\phi(\nu) = \frac{2}{\pi \Delta\nu} \frac{1}{1 + 4(\nu - \nu_0)^2 / \Delta\nu^2} \quad (40)$$

- (c) No obstant, l'efecte és molt petit e inobservable pel medi interestelar (de l'ordre de $\frac{\Delta\nu}{\nu} \simeq 10^{-7}$ al visible i $\frac{\Delta\nu}{\nu} \ll 10^{-10}$ a radio).

2. Els moviments de les partícules produeixen un desplaçament de la freqüència per l'efecte Doppler degut a la velocitat radial v_r

$$\frac{\nu_{observada} - \nu_0}{\nu_0} = -\frac{v_r}{c} \quad (41)$$

Si les partícules segueixen una distribució maxwelliana de velocitat, el perfil de línia serà gaussià:

$$\phi(\nu) = \sqrt{\frac{4 \ln(2)}{\pi}} \frac{1}{\Delta\nu} e^{-4 \ln(2)(\nu - \nu_0)^2 / \Delta\nu^2} \quad (42)$$

En aquest cas l'amplada es denomina amplada tèrmica:

$$\Delta\nu_{th} = \sqrt{\frac{8 \ln(2) k T_k}{m}} \frac{\nu_0}{c} \quad (43)$$

3. La turbulència: $\Delta\nu_{turb}$
 4. Moviment sistemàtics com la rotació, contracció o expansió: $\Delta\nu_{sist}$

Finalment, l'amplada de línia estarà compost per tots els efectes:

$$\Delta\nu_{obs}^2 = \Delta\nu_{th}^2 + \Delta\nu_{turb}^2 + \Delta\nu_{sist}^2 \quad (44)$$

Per altra banda, l'amplada observada permet identificar el límit superior per a la temperatura cinètica de la regió:

$$T_k \leq 22.7 m \Delta\nu_{obs} \quad (45)$$

3.3 Coeficients d'Einstein

Una transició entre dos estat (nivell inferior 1 i nivell superior 2) a on la freqüència del fotó emès serà $\nu_{21} = \frac{(E_2 - E_1)}{h}$

- Emissió espontànea: transició entre dos estat (nivell inferior 1 i nivell superior 2) a on la freqüència del fotó emès serà $\nu_{21} = \frac{(E_2 - E_1)}{h}$. A_{21} és el coeficient d'Einstein d'emissió espontània, representa la probabilitat de transició i té unitats s^{-1} . El temps de vida ve determinat per $t_{vida} = A_{21}^{-1}$. El coeficient d'emissió és:

$$j_\nu = \frac{n_2 A_{21}}{4\pi} h \nu_{21} \phi(\nu) \quad (46)$$

a on n_2 és la densitat de partícules al nivell 2 i $h\nu_{21}$ l'energia del fotó emès. Els dos nivells es troben relacionats per:

$$\frac{dn_1}{dt} = -\frac{dn_2}{dt} = n_2 A_{21} \quad (47)$$

- Absorció d'un fotó de freqüència ν_{21} . En aquest cas B_{12} és el coeficient d'Einstein d'absorció, representant la probabilitat amb unitats $erg^{-1} cm^2 sr Hz$. Els dos nivells es troben relacionats per:

$$\frac{dn_2}{dt} = -\frac{dn_1}{dt} = n_1 B_{12} \bar{I}_\nu \quad (48)$$

- Emissió induïda quan un fotó incident redueix el nivell d'un àtom, emeten un nou fotó (el fotó original continua la seva trajectòria original). El coeficient d'absorció:

$$k_\nu = \frac{n_1 B_{12} - n_2 B_{21}}{4\pi} h \nu_{21} \phi(\nu) \quad (49)$$

Els dos nivells es troben relacionats per:

$$\frac{dn_1}{dt} = -\frac{dn_2}{dt} = n_2 B_{21} \bar{I}_\nu \quad (50)$$

Els tres factors es troben relacionats:

$$n_2 A_{21} = (n_1 B_{12} - n_2 B_{21}) I_\nu \quad (51)$$

Operant es possible determinar que:

$$A_{21} = \frac{2h\nu_{21}^3}{c^2} B_{21} \quad (52)$$

3.4 Funció de font

La temperatura d'excitació de la transició es defineix com:

$$\frac{n_1 g_2}{n_2 g_1} = e^{h\nu_{21}/kT_{ex}} \quad (53)$$

a on g_n és el pes estadístic del nivell n .

La funció font pot redefinir-se com:

$$S_\nu = \frac{j_\nu}{k_\nu} = \frac{2h\nu_{21}^3/c^2}{n_1 g_2/n_2 g_1 - 1} = B_\nu(T_{ex}) = \frac{2h\nu_{21}^3/c^2}{e^{h\nu_{21}/kT_{ex}}} \quad (54)$$

3.5 Profunditat òptica

Si la temperatura d'excitació és constant a la visual llavors podem expressar la profunditat òptica com:

1. En funció de la freqüència:

$$\tau_\nu = \frac{c^2}{8\pi\nu_{21}^2} A_{21} N_2 \left(e^{h\nu_{21}/kT_{ex}} - 1 \right) \phi(\nu) \quad (55)$$

a on $N_2 = \int_{visual} n_2 dl$.

2. En funció de la velocitat:

$$\tau_\nu = \frac{c^3}{8\pi\nu_{21}^3} A_{21} N_2 \left(e^{h\nu_{21}/kT_{ex}} - 1 \right) \phi_v(v) \quad (56)$$

3. Relació amb la profunditat òptica màxima τ_0 (al centre de línia) i amplada Δv amb distribució maxwelliana de velocitats:

$$\tau_v = \tau_0 \Delta v \phi_v(v) = \tau_0 e^{-4 \ln(2)(v-v_{LSR})^2/\Delta v^2} \quad (57)$$